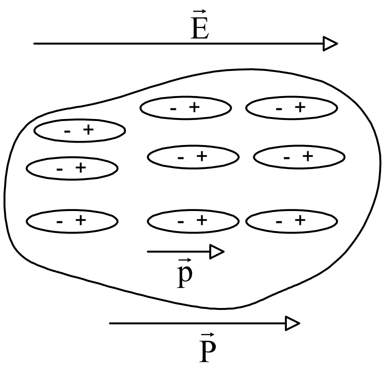
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

4.1 Διηλεκτρικά

Διηλεκτρικό (ή μονωτής) ονομάζεται κάθε υλικό (στερεό, υγρό, αέριο) που δεν περιέχει ελεύθερα ηλεκτρικά φορτία, δηλαδή είναι υλικό που δεν άγει το ηλεκτρικό ρεύμα. Στα διηλεκτρικά όλα τα ηλεκτρόνια είναι ισχυρά συνδεδεμένα στον ατομικό πυρήνα (ή στα μόρια), δηλαδή τα διηλεκτρικά αποτελούνται από ισχυρά συνδεδεμένα ζεύγη θετικών – αρνητικών φορτίων.

Άρα κάθε διηλεκτρικό είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, αφού αποτελείται από ουδέτερα άτομα.



Σχήμα 4.1

Η παρουσία ενός διηλεκτρικού εντός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ έχει ως αποτέλεσμα να εξασκούνται δυνάμεις αντίθετης φοράς επί των ηλεκτρονίων (ηλεκτρονικού νέφους) (-) και του πυρήνα των ατόμων αυτού (+) αντίστοιχα. Υπό την επίδραση των δυνάμεων αυτών ηλεκτρονικό νέφος και πυρήνας μετακινούνται με αντίθετες φορές απομακρυνόμενα το ένα από το άλλο. Ταυτόχρονα η απομάκρυνση αυτή προκαλεί τη δημιουργία ελκτικής δύναμης μεταξύ ηλεκτρονικού νέφους – πυρήνα, η οποία αντιτίθεται στον περαιτέρω διαχωρισμό αυτών. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η δημιουργία συνθήκης ισορροπίας των δυνάμεων , στην οποία υπάρχει σχετική μετατόπιση ηλεκτρονικού νέφους – πυρήνα. Συνέπεια της μετατοπίσεως αυτής είναι κάθε άτομο του διηλεκτρικού να συμπεριφέρεται ως ηλεκτρικό δίπολο κι επομένως αποκτά ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{p}$ ομοπαράλληλη προς το πεδίο (παράγραφος **1.5**). Δηλαδή κάθε άτομο του διηλεκτρικού πολώνεται.

Συνεπώς όλο το διηλεκτρικό πολώνεται και το φαινόμενο αυτό περιγράφεται από την **πόλωση του διηλεκτρικού** $\vec{P}$, που ορίζεται ως η πυκνότητα της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\vec{p}$, δηλαδή αν σε στοιχειώδη όγκο dV του διηλεκτρικού περιέχονται ηλεκτρικά δίπολα με συνολική διπολική ροπή $d\vec{p}$ τότε :

$$\boxed{\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}} \qquad \textbf{(4 – 1)}$$

Σε πολλά υλικά η πόλωση είναι ανάλογη του πεδίου :

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_o \chi \vec{E}} \qquad \textbf{(4 - 2)}$$

όπου η σταθερά αναλογίας χ ονομάζεται **ηλεκτρική επιδεκτικότητα** του μέσου, εξαρτάται από τη δομή του υλικού και είναι μη αρνητικός αριθμός.
Τα διηλεκτρικά που υπακούουν στη σχέση **(4 – 2)** ονομάζονται **ισότροπα ή γραμμικά** διηλεκτρικά.

4.2 Δέσμια Φορτία – Νόμος Gauss στα Διηλεκτρικά

Η πόλωση ενός διηλεκτρικού έχει ως αποτέλεσμα τη συσσώρευση φορτίων, τα οποία δεν έχουν την ευχέρεια κίνησης και γι΄ αυτό ονομάζονται **δέσμια φορτία** (ή φορτία πόλωσης), τόσο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού όσο και στην επιφάνειά του.
Η **χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων ρ_p** στον όγκο του διηλεκτρικού δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}} \qquad \textbf{(4 – 3)}$$

ενώ η **επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p** στην επιφάνεια του διηλεκτρικού δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}} \qquad \textbf{(4 – 4)}$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα από την επιφάνεια του διηλεκτρικού προς τον κενό χώρο.
Εννοείται ότι το ολικό δέσμιο φορτίο q_p είναι μηδέν, αφού τα δέσμια φορτία βρίσκονται σε ζεύγη θετικών – αρνητικών φορτίων. Δηλαδή :

$$q_p = \int_V \rho_p dV + \int_S \sigma_p dS = 0$$

Αν το διηλεκτρικό φορτιστεί επιπλέον με **ελευθέρα φορτία** χωρικής πυκνότητας ρ_f και επιφανειακής πυκνότητας σ_f τότε λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου η χωρική πυκνότητα του ολικού φορτίου είναι :

$$\boxed{\rho = \rho_f + \rho_p} \qquad \textbf{(4 – 5)}$$

ενώ η επιφανειακή πυκνότητα του ολικού φορτίου είναι :

$$\boxed{\sigma = \sigma_f + \sigma_p} \qquad \textbf{(4 – 6)}$$

Επομένως ο νόμος του Gauss στην περίπτωση διηλεκτρικού μέσου δίνει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_o}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_o}\overset{(4-3)}{\Rightarrow}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon_o}-\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{\varepsilon_o}\Rightarrow\varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E}+\vec{\nabla}\cdot\vec{P}=\rho_f\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P})=\rho_f \qquad \mathbf{(4-7)}$$

Τη διανυσματική συνάρτηση $\boxed{\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}}$ **(4 – 8)**
καλούμε **διηλεκτρική μετατόπιση**. Η χαρακτηριστική ιδιότητα της διηλεκτρικής μετατόπισης είναι ότι η απόκλιση αυτής, όπως προκύπτει από τις σχέσεις **(4 – 7)** και **(4 – 8)**, ισούται με την πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων. Δηλαδή :

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_f} \qquad \mathbf{(4-9)}$$

Η σχέση **(4 – 9)** αποτελεί το **νόμο του Gauss στα διηλεκτρικά** και με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss μπορεί να πάρει την ολοκληρωτική μορφή:

$$\boxed{\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=q_f} \qquad \mathbf{(4-10)}$$

όπου q_f είναι το ολικό ελεύθερο φορτίο που περικλείει η επιφάνεια Gauss S.
Από τις σχέσεις **(4 – 2)** και **(4 – 8)** προκύπτει :

$$\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\varepsilon_o\chi\vec{E}=\varepsilon_o(1+\chi)\vec{E}\Rightarrow\boxed{\vec{D}=\varepsilon_o\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}} \qquad \mathbf{(4-11)}$$

όπου ε_r η **σχετική διηλεκτρική σταθερά**. Επειδή είναι $\varepsilon_r=\chi+1$ και $\chi\geq 0$ προκύπτει ότι $\varepsilon_r\geq 1$. Η **απόλυτη διηλεκτρική σταθερά ή ηλεκτρική διαπερατότητα** ενός υλικού είναι :

$$\boxed{\varepsilon=\varepsilon_o\varepsilon_r} \qquad \mathbf{(4-12)}$$

Μεθοδολογία

Στα προβλήματα διηλεκτρικών συνήθως δίνονται τα ελεύθερα φορτία. Συνεπώς με εφαρμογή της σχέσης **(4 –10)** υπολογίζεται το διάνυσμα $\vec{D}$, ενώ από τη σχέση **(4 – 11)** υπολογίζεται η ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου και τέλος από τη σχέση **(4 – 8)** υπολογίζεται η πόλωση $\vec{P}$.

Παρατηρήσεις :

1) Η επιφανειακή πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων σ_f στην επιφάνεια του διηλεκτρικού δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{\sigma_f = -\vec{D}\cdot\hat{n}} \qquad \textbf{(4 – 13)}$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα από την επιφάνεια προς τον κενό χώρο.

2) Από τη σχέση **(4 – 11)** προκύπτει :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o\varepsilon_r} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}{\varepsilon_o\varepsilon_r} \overset{(4-9)}{\Rightarrow} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_o\varepsilon_r}$$

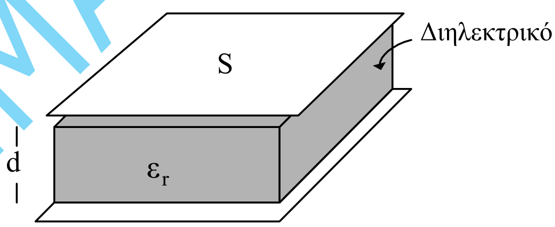
άρα εντός διηλεκτρικού η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κατά ε_r φορές ασθενέστερη της έντασης του πεδίου στον κενό χώρο.

3) Στην διαχωριστική επιφάνεια ενός διηλεκτρικού με τον κενό χώρο ή δυο διηλεκτρικών αποδεικνύεται ότι οι εφαπτομενικές συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E_1 και E_2 στις δυο περιοχές αντίστοιχα είναι ίσες.

Εφαρμογή

Ένας επίπεδος πυκνωτής με οπλισμούς εμβαδού S, που βρίσκονται σε απόσταση d μεταξύ τους είναι γεμάτος με μονωτικό υλικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού.

Λύση



Σχήμα 4.2

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στα διηλεκτρικά **(4 – 10)** σε κλειστή επιφάνεια Gauss εμβαδού βάσης S στο χώρο μεταξύ των οπλισμών προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow DS = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{S} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου Q είναι τα ελευθέρα φορτία του οπλισμού του πυκνωτή και το $\vec{D}$ διέρχεται μόνο από τη βάση της επιφάνειας Gauss μεταξύ των οπλισμών.

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο μεταξύ των οπλισμών, σύμφωνα με την **(4 – 11)** είναι :

$$D = \varepsilon_o \varepsilon_r E \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_o \varepsilon_r} \overset{(1)}{=} \frac{Q}{\varepsilon_o \varepsilon_r S} \qquad \textbf{(2)}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$dV = -E dx \overset{(2)}{\Rightarrow} \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{Q}{\varepsilon_o \varepsilon_r S} \int_{d}^{0} dx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{Qd}{\varepsilon_o \varepsilon_r S} \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι :

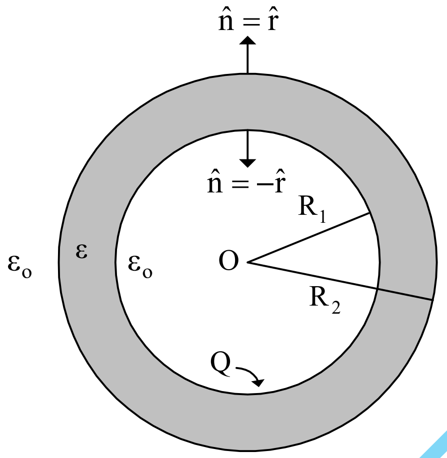
$$C = \frac{Q}{\Delta V} \overset{(3)}{\Rightarrow} C = \varepsilon_r \varepsilon_o \frac{S}{d} \quad \text{ή} \quad \boxed{C = \varepsilon_r C_o} \qquad \textbf{(4 – 14)}$$

όπου C_o η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή στο κενό, σύμφωνα με τη σχέση **(3 – 6)**.

Άσκηση 4.1

Ο χώρος μεταξύ δυο ομόκεντρων σφαιρικών επιφανειών ακτίνων R_1 και R_2 είναι γεμάτος με διηλεκτρικό απόλυτης διηλεκτρικής σταθεράς ε, ενώ η εσωτερική σφαιρική επιφάνεια είναι φορτισμένη με φορτίο Q. Να υπολογιστούν τα μεγέθη $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ καθώς και οι πυκνότητες των δέσμιων φορτίων σ_p και ρ_p παντού στο χώρο.

Λύση



Το φορτίο Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην εσωτερική επιφάνεια ακτίνας R_1 και αποτελεί το ελεύθερο φορτίο του συστήματος. Έτσι λόγω σφαιρικής συμμετρίας οι ιδιότητες συμμετρίας του $\vec{E}$ ισχύουν και για το $\vec{D}$.
Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για διηλεκτρικό σε σφαιρική επιφάνεια προκύπτει :

Για $r < R_1$: $\oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow \vec{D}_1 = 0$

(επειδή $q_f = 0$)

Για $R_1 < r < R_2$: $\oint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_2 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_2 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$$\text{ή} \quad \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Για $r > R_2$: $\oint_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_3 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_3 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$$\text{ή} \quad \vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει από τη σχέση **(4 – 11)** ως :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}, & \text{για} \quad R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}, & \text{για} \quad r > R_2 \end{cases}$$

Ενώ το διάνυσμα της πόλωσης $\vec{P}$ προκύπτει από τη σχέση **(4 – 8)** ως :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o\vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r}, & \text{για} \quad R_1 < r < R_2 \\ 0, & \text{για} \quad r > R_2 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p δίνεται από τη σχέση **(4 – 4)** :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα από το διηλεκτρικό προς το κενό.
Αλλά στην εσωτερική επιφάνεια για $r = R_1$ είναι $\hat{n} = -\hat{r}$, οπότε λόγω και της **(1)** προκύπτει :

$$\sigma_{1p} = -\hat{r} \cdot \frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r} \Rightarrow \sigma_{1p} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon} - 1\right)$$

ενώ στην εξωτερική επιφάνεια για $r = R_2$ είναι $\hat{n} = \hat{r}$, οπότε :

$$\sigma_{2p} = \hat{r} \cdot \frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r} \Rightarrow \sigma_{2p} = \frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)$$

Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων ρ_p δίνεται από τη σχέση **(4 – 3)** :

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \vec{r}/r$ η σχέση **(1)** της πόλωσης $\vec{P}$ ανάγεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες :

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^3}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\vec{r} = \frac{Q}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\frac{(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Άρα η **(2)** τώρα δίνει :

$$\rho_p = -\frac{Q}{4\pi r}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]\right\} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\left[\frac{1(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}+\right.$$

$$+\frac{1(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}+$$

$$\left.+\frac{1(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - z\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\cdot$$

$$\cdot(x^2+y^2+z^2-3x^2+x^2+y^2+z^2-3y^2+x^2+y^2+z^2-3z^2) = 0$$

Άρα $\rho_p = 0$, δηλαδή το χωρικό δέσμιο φορτίο είναι μηδενικό.

Άσκηση 4.2

Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δυο ομόκεντρους αγώγιμους σφαιρικούς οπλισμούς ακτίνων R_1, R_2, που είναι φορτισμένοι με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$ και ο μεταξύ τους χώρος γεμίζει από δυο διηλεκτρικά ίσων όγκων, απόλυτων διηλεκτρικών σταθερών ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.
Να υπολογιστούν :

α) Η ένταση $\vec{E}$.

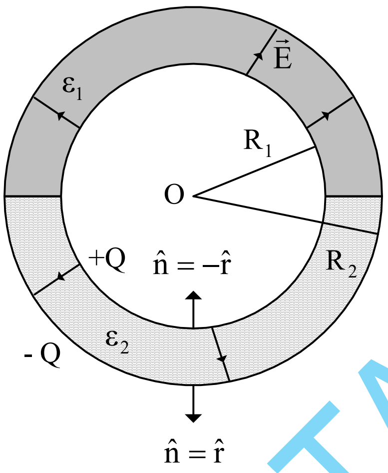
β) Η διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$.

γ) Η πόλωση $\vec{P}$.

δ) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p.

ε) Η χωρητικότητα C του πυκνωτή αυτού.

Λύση



α) Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 της παραγράφου **4.2** οι εφαπτομενικές συνιστώσες της έντασης στη διαχωριστική επιφάνεια είναι ίσες, με άμεση συνέπεια η ένταση στα δυο διηλεκτρικά για την ίδια απόσταση r από το κέντρο O να είναι ίδια. Δηλαδή $E_1(r) = E_2(r) = E(r)$. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στα διηλεκτρικά σε σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας $R_1 < r < R_2$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow \oint_{S_1} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = Q \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $q_f = Q$ το ελεύθερο φορτίο του οπλισμού που περικλείει η επιφάνεια S και S_1, S_2 η άνω και κάτω ημισφαιρική επιφάνεια αντίστοιχα.
Αλλά σύμφωνα με τη σχέση **(4 – 11)** είναι :

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E} \quad \text{και} \quad \vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E} \qquad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς η εξίσωση **(1)** δίνει :

$$\varepsilon_1\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_2\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \varepsilon_1 E 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E 2\pi r^2 = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \vec{E} = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Η διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$, λόγω των σχέσεων **(2)** και **(3)** είναι :

$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \quad \text{για το άνω ημισφαίριο}$$

$$\vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \quad \text{για το κάτω ημισφαίριο}$$

γ) Σύμφωνα με την **(4 – 8)** η πόλωση $\vec{P}$ είναι :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o\vec{E} \overset{(4-11)}{=} \varepsilon\vec{E} - \varepsilon_o\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E}$$

Άρα λόγω της **(3)** είναι : $\vec{P}_1 = \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}$ και $\vec{P}_2 = \dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}$

δ) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$ για $r = R_1$ και $r = R_2$.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα στην εσωτερική επιφάνεια $r = R_1$ είναι $\hat{n} = -\hat{r}$ οπότε :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}_1\cdot\hat{n} = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}\cdot(-\hat{r}) \Rightarrow \sigma_{1p} = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_1)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

για την άνω εσωτερική επιφάνεια

$$\sigma_{2p} = \vec{P}_2\cdot\hat{n} \Rightarrow \sigma_{2p} = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_2)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

για την κάτω εσωτερική επιφάνεια.

Ενώ στην εξωτερική επιφάνεια $r = R_2$ είναι $\hat{n} = \hat{r}$, οπότε :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}_1\cdot\hat{n} = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}\cdot\hat{r} \Rightarrow \sigma_{1p} = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

για την άνω εξωτερική επιφάνεια

$$\sigma_{2p} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma_{2p} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

για την κάτω εξωτερική επιφάνεια.

ε) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι :

$$dV = -Edr \overset{(3)}{\Rightarrow} \int_{V(R_2)}^{V(R_1)} dV = -\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \Delta V = V(R_1) - V(R_2) =$$

$$= \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \overset{(4)}{\Rightarrow} C = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Άσκηση 4.3

Διηλεκτρικό σε σχήμα κυλίνδρου ύψους ℓ και ακτίνας βάσης R, τοποθετείται με τον άξονά του να συμπίπτει με τον άξονα z και τις βάσεις του στις θέσεις $z = 0$ και $z = \ell$. Το διηλεκτρικό αυτό είναι πολωμένο με πόλωση $\vec{P} = (\alpha z^2 + b)\hat{z}$, όπου α,b σταθερές.

Να υπολογιστούν :

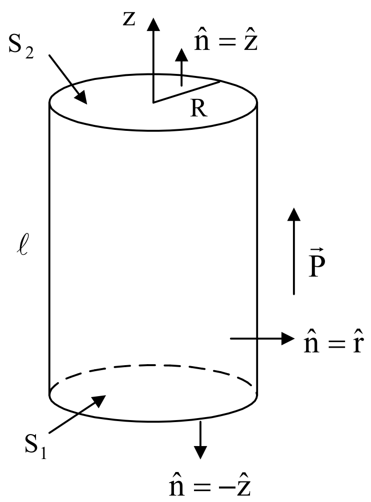
α) Οι επιφανειακές πυκνότητες των δέσμιων φορτίων σ_{1p} και σ_{2p}, που εμφανίζονται στις δυο βάσεις του κυλίνδρου και τα αντίστοιχα φορτία Q_1 και Q_2 των δυο βάσεων.

β) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_{3p} της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

γ) Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων ρ_p.

δ) Αποδείξτε ότι το συνολικό φορτίο του διηλεκτρικού είναι μηδέν.

Λύση



α) Οι επιφανειακές πυκνότητες των δέσμιων φορτίων στις θέσεις $z = 0$ και $z = \ell$ αντίστοιχα είναι :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}(z=0)\cdot\hat{n} = b\hat{z}\cdot(-\hat{z}) \Rightarrow \sigma_{1p} = -b$$

$$\sigma_{2p} = \vec{P}(z=\ell)\cdot\hat{n} = (\alpha\ell^2 + b)\hat{z}\cdot\hat{z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_{2p} = \alpha\ell^2 + b$$

Τα αντίστοιχα φορτία των δυο βάσεων είναι :

$$Q_1 = \int_{S_1}\sigma_{1p}dS = -b\int_{S_1}dS \Rightarrow Q_1 = -b\pi R^2$$

$$Q_2 = \int_{S_2}\sigma_{2p}dS = (\alpha\ell^2 + b)\int_{S_2}dS \Rightarrow Q_2 = (\alpha\ell^2 + b)\pi R^2$$

β) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων της παράπλευρης επιφάνειας είναι :

$$\sigma_{3p} = \vec{P}\cdot\hat{n} = (\alpha z^2 + b)\hat{z}\cdot\hat{r} \Rightarrow \sigma_{3p} = 0 \quad (\text{επειδή } \hat{z}\cdot\hat{r} = 0 \text{ αφού } \hat{z}\perp\hat{r}).$$

γ) Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων, σύμφωνα με τη σχέση **(4 – 3)** είναι :

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha z^2 + b) \Rightarrow \rho_p = -2\alpha z$$

δ) Το συνολικό δέσμιο φορτίο του διηλεκτρικού είναι :

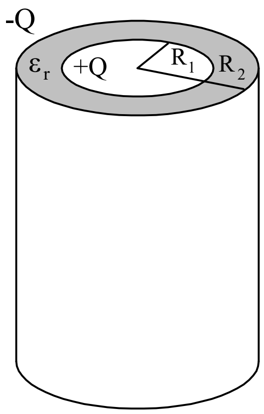
$$Q = \int_V \rho_p dV + \int_{S_1}\sigma_{1p}dS + \int_{S_2}\sigma_{2p}dS = -2\alpha\int_0^{\ell} zSdz - b\int_{S_1}dS + (\alpha\ell^2 + b)\int_{S_2}dS =$$

$$= \frac{-2\alpha S\ell^2}{2} - bS + (\alpha\ell^2 + b)S = 0$$

Άσκηση 4.4

Δυο ομοαξονικές αγώγιμες κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνων R_1 και R_2 ($R_1 < R_2$) και απείρου μήκους είναι φορτισμένες με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$. Ο χώρος μεταξύ των επιφανειών αυτών είναι γεμάτος με διηλεκτρικό υλικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\varepsilon_r = \alpha r$, όπου α θετική σταθερά και r η απόσταση από τον άξονα των κυλίνδρων.
Να υπολογιστεί η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του συστήματος του πυκνωτή που σχηματίζουν οι αγώγιμες επιφάνειες.

Λύση



Εφαρμόζοντας το νόμο Gauss στα διηλεκτρικά σε κυλινδρική επιφάνεια S ακτίνας $R_1 < r < R_2$ και μήκους ℓ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D2\pi r\ell = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{2\pi r\ell}$$

$$\text{ή} \quad \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r\ell}\hat{r} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $q_f = Q$ το ελεύθερο φορτίο του οπλισμού που περικλείει η επιφάνεια S και ροή του διανύσματος $\vec{D}$ παρατηρείται μόνο στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

Άρα :
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o\varepsilon_r} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \alpha r} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \alpha r^2 \ell}\hat{r}$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_{R_2}^{R_1} E dr \Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o\alpha\ell}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o\alpha\ell}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o\alpha\ell}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \qquad \textbf{(2)}$$

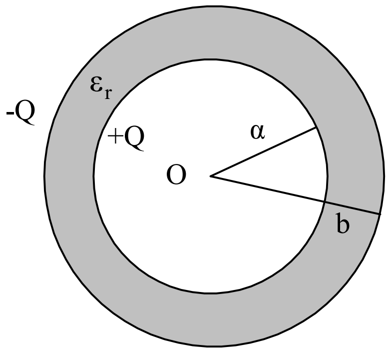
Άρα η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του συστήματος είναι :

$$\frac{C}{\ell} = \frac{Q}{\Delta V \ell} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{C}{\ell} = 2\pi\varepsilon_o\alpha\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Άσκηση 4.5

Ένας σφαιρικός πυκνωτής έχει οπλισμούς ακτίνων α, b που είναι φορτισμένοι με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$. Ανάμεσα στους οπλισμούς τοποθετείται διηλεκτρικό υλικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\varepsilon_r = b/r$, όπου r η απόσταση από το κέντρο του πυκνωτή.
Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Λύση



Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, εφαρμόζοντας το νόμο Gauss για διηλεκτρικά σε σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας $\alpha < r < b$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D4\pi r^2 = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\text{ή} \quad \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \frac{b}{r}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o br}\hat{r} \qquad \textbf{(2)}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_b^\alpha E dr \overset{(2)}{\Rightarrow} \Delta V = V_1 - V_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}\int_b^\alpha \frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}\ell n\frac{b}{\alpha} \qquad \textbf{(3)}$$

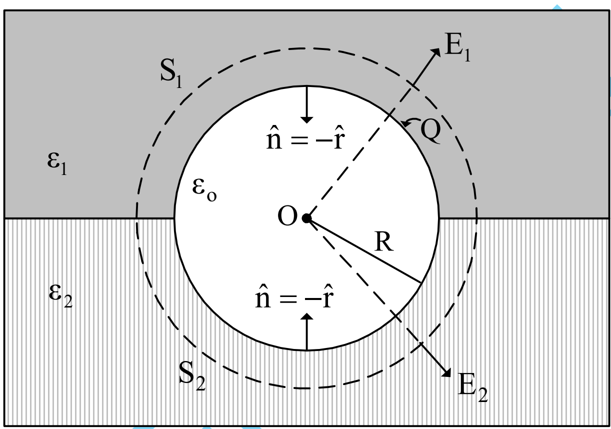
Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \overset{(3)}{\Rightarrow} C = \frac{4\pi\varepsilon_o b}{\ell n\frac{b}{\alpha}}$$

Άσκηση 4.6

Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R φορτισμένη με φορτίο Q, τοποθετείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το κέντρο της να βρίσκεται πάνω στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών υλικών στο χώρο με απόλυτες διηλεκτρικές σταθερές ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Να υπολογιστούν η ένταση $\vec{E}$, το διάνυσμα $\vec{D}$, η πόλωση $\vec{P}$ και οι επιφανειακές πυκνότητες των δέσμιων σ_p και των ελεύθερων φορτίων σ_f.

Λύση



Ηλεκτρικό πεδίο προφανώς υφίσταται μόνο στην περιοχή των διηλεκτρικών. Οι εφαπτομενικές συνιστώσες της έντασης στη διαχωριστική επιφάνεια των δυο διηλεκτρικών είναι ίσες (Παρατήρηση 3 παραγράφου **4.2**), κι επομένως η ένταση στα δυο διηλεκτρικά για την ίδια απόσταση από το κέντρο O είναι ίδια.

Δηλαδή : $E_1(r) = E_2(r) = E(r)$.

Εφαρμόζοντας το νόμο Gauss για διηλεκτρικά στην σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r > R$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow \int_{S_1} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = Q \qquad \textbf{(1)}$$

όπου S_1, S_2 η άνω και κάτω ημισφαιρική επιφάνεια αντίστοιχα.

Αλλά: $\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}$ και $\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}$ **(2)** Οπότε η εξίσωση **(1)** δίνει :

$$\varepsilon_1\int_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_2\int_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \varepsilon_1 E 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E 2\pi r^2 = Q \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

Άρα οι **(2)** δίνουν : $\vec{D}_1 = \dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$ και $\vec{D}_2 = \dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$

Η πόλωση $\vec{P}$ είναι : $\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o\vec{E} = \varepsilon\vec{E} - \varepsilon_o\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E}$

Δηλαδή : $\vec{P}_1 = \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$ και $\vec{P}_2 = \dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_o)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$

Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι : $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$

Ενώ των ελεύθερων φορτίων σύμφωνα με τη σχέση **(4-13)** είναι :

$$\sigma_f = -\vec{D}\cdot\hat{n}$$

Αλλά στην επιφάνεια της αγώγιμης σφαίρα είναι $\hat{n} = -\hat{r}$ οπότε :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}_1(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_1)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}, \quad \sigma_{1f} = -\vec{D}_1(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}$$

$$\sigma_{2p} = \vec{P}_2(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_2)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}, \quad \sigma_{2f} = -\vec{D}_2(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}$$

Άσκηση 4.7

Σφαίρα ακτίνας R είναι ομοιόμορφα πολωμένη με ακτινική πόλωση $\vec{P} = P_o\hat{r}$. Να υπολογιστούν :

α) Η επιφανειακή και χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p και ρ_p αντίστοιχα.

β) Η ένταση $\vec{E}$ και το διάνυσμα $\vec{D}$, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία ($q_f = 0$).

Λύση

α) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P_o\hat{r}\cdot\hat{r} \Rightarrow \sigma_p = P_o \quad (\text{όπου} \quad \hat{n} = \hat{r})$$

Για τον υπολογισμό της χωρικής πυκνότητας των δέσμιων φορτίων ρ_p, η πόλωση $\vec{P}$ γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως :

$$\vec{P} = P_o \hat{r} = \frac{P_o}{r}\vec{r} = \frac{P_o}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})$$

Άρα : $$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)$$

Εκτελώντας τις παραπάνω παραγωγίσεις εύκολα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα :

$$\rho_p = \frac{-2P_o}{r}$$

β) Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στο διηλεκτρικό σε σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας r < R προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \quad (\text{αφού } q_f = 0)$$

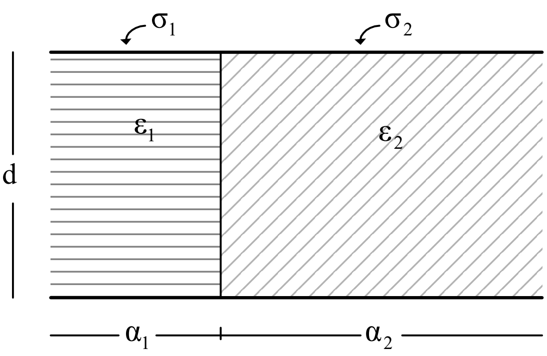
Άρα η ένταση $\vec{E}$ θα υπολογιστεί μέσω της σχέσης **(4 – 8)** :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E}+\vec{P} \Rightarrow \varepsilon_o\vec{E}+\vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{-\vec{P}}{\varepsilon_o} = \frac{-P_o}{\varepsilon_o}\hat{r}$$

Άσκηση 4.8

Ένας επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από ορθογώνιους οπλισμούς διαστάσεων α, b που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d << α, b. Ο πυκνωτής περιέχει δυο διηλεκτρικά απόλυτων διηλεκτρικών σταθερών ε_1, ε_2 και διαστάσεων $\alpha_1 \times b \times d$ και $\alpha_2 \times b \times d$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Λύση



Υποθέτοντας ότι ο πάνω οπλισμός έχει φορτίο +Q τότε ένα μέρος του Q_1 κατανέμεται στο τμήμα του που εφάπτεται στο υλικό διηλεκτρικής σταθεράς ε_1 και το υπόλοιπο $Q_2 = Q - Q_1$ στο τμήμα που εφάπτεται στο υλικό διηλεκτρικής σταθεράς ε_2. Συνεπώς οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στα δυο τμήματα είναι :

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{\alpha_1 b} \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q_2}{\alpha_2 b} \qquad \textbf{(1)}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στα δυο διηλεκτρικά σε κλειστές επιφάνειες εμβαδού βάσης S_1 και S_2 αντίστοιχα στο χώρο μεταξύ των οπλισμών προκύπτει :

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_1 S_1 = Q_1 \Rightarrow D_1 = \frac{Q_1}{\alpha_1 b} \overset{(1)}{\Rightarrow} D_1 = \sigma_1 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\oint_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_2 S_2 = Q_2 \Rightarrow D_2 = \frac{Q_2}{\alpha_2 b} \overset{(1)}{\Rightarrow} D_2 = \sigma_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σύμφωνα με τη σχέση $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ και λόγω των **(2)**, **(3)** είναι αντίστοιχα :

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών, όταν υπολογιστεί κατά μήκος διαδρομής στο υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε_1 δίνει :

$$dV = -E_1 dx \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\int_d^0 dx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} d \overset{(1)}{=} \frac{Q_1 d}{\alpha_1 b \varepsilon_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{\alpha_1 b \varepsilon_1}{d}\Delta V \qquad \textbf{(4)}$$

Ενώ κατά μήκος του υλικού με διηλεκτρική σταθερά ε_2 δίνει :

$$dV = -E_2 dx \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}\int_{d}^{0} dx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} d \overset{(1)}{=} \frac{Q_2 d}{\alpha_2 b \varepsilon_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{\alpha_2 b \varepsilon_2}{d}\Delta V \qquad \textbf{(5)}$$

Σημειώνεται ότι η διαφορά δυναμικού των οπλισμών είναι ίδια από οποιαδήποτε διαδρομή και να υπολογιστεί.
Επομένως λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου ισχύει :

$$Q = Q_1 + Q_2 \overset{(4),(5)}{\Rightarrow} Q = \frac{\alpha_1 b \varepsilon_1}{d}\Delta V + \frac{\alpha_2 b \varepsilon_2}{d}\Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\alpha_1 b \varepsilon_1}{d} + \frac{\alpha_2 b \varepsilon_2}{d} \Rightarrow C = \frac{b}{d}(\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2)$$

2^{ος} τρόπος

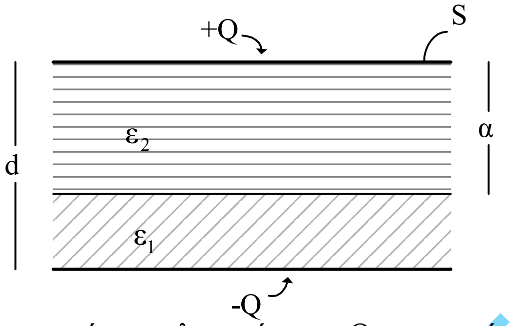
Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί εναλλακτικά θεωρώντας ότι ο πυκνωτής αυτός αποτελείται από δυο πυκνωτές χωρητικοτήτων $C_1 = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} = \varepsilon_1 \frac{\alpha_1 b}{d}$ και $C_2 = \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = \varepsilon_2 \frac{\alpha_2 b}{d}$, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους (αφού έχουν κοινή διαφορά δυναμικού στα άκρα τους).
Άρα η ολική χωρητικότητα είναι :

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_1 \frac{\alpha_1 b}{d} + \varepsilon_2 \frac{\alpha_2 b}{d} \Rightarrow C = \frac{b}{d}(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2)$$

Άσκηση 4.9

Ένας επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από ορθογώνιους οπλισμούς εμβαδού S που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και μεταξύ των οπλισμών τοποθετούνται δυο διηλεκτρικά υλικά με απόλυτες διηλεκτρικές σταθερές ε_1 και ε_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού.

Λύση



Έστω ότι +Q είναι το φορτίο του πάνω οπλισμού και –Q το φορτίο του κάτω οπλισμού. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στα διηλεκτρικά υπολογίζεται η διηλεκτρική μετατόπιση ως :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow DS = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{S}$$

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι :

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{S\varepsilon_1} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{S\varepsilon_2}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι :

$$dV = -Edx \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_d^0 Edx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \int_0^d Edx = \int_0^\alpha E_2 dx + \int_\alpha^d E_1 dx =$$

$$= \frac{Q}{S\varepsilon_2}\int_0^\alpha dx + \frac{Q}{S\varepsilon_1}\int_\alpha^d dx = \frac{Q}{S\varepsilon_2}\alpha + \frac{Q}{S\varepsilon_1}(d-\alpha) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{S}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon_2} + \frac{d-\alpha}{\varepsilon_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S}{\frac{\alpha}{\varepsilon_2} + \frac{d-\alpha}{\varepsilon_1}}$$

2ος τρόπος

Το ισοδύναμο του πυκνωτή αυτού είναι δυο πυκνωτές χωρητικοτήτων $C_1 = \varepsilon_1 \frac{S}{d-\alpha}$ και $C_2 = \varepsilon_2 \frac{S}{\alpha}$, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι σε σειρά.

Άρα η ολική χωρητικότητά του είναι :

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Rightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{S}{\dfrac{\alpha}{\varepsilon_2}+\dfrac{d-\alpha}{\varepsilon_1}}$$

Άσκηση 4.10

Να αποδειχθεί ότι η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p ενός διηλεκτρικού συνδέεται με την επιφανειακή πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων σ_f μέσω της σχέσης :

$$\sigma_p=\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\sigma_f$$

Λύση

Σύμφωνα με τη σχέση **(4 – 8)** είναι : $\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}\Rightarrow\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_o\vec{E}$ **(1)**

Αλλά σύμφωνα με τη σχέση **(4 –11)** είναι :

$$\vec{D}=\varepsilon_o\varepsilon_r\vec{E}\Rightarrow\varepsilon_o\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_r}$$

οπότε η **(1)** γίνεται :

$$\vec{P}=\vec{D}-\frac{\vec{D}}{\varepsilon_r}=\vec{D}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\Rightarrow\vec{P}=\vec{D}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{P}\cdot\hat{n}=\vec{D}\cdot\hat{n}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\qquad\textbf{(2)}$$

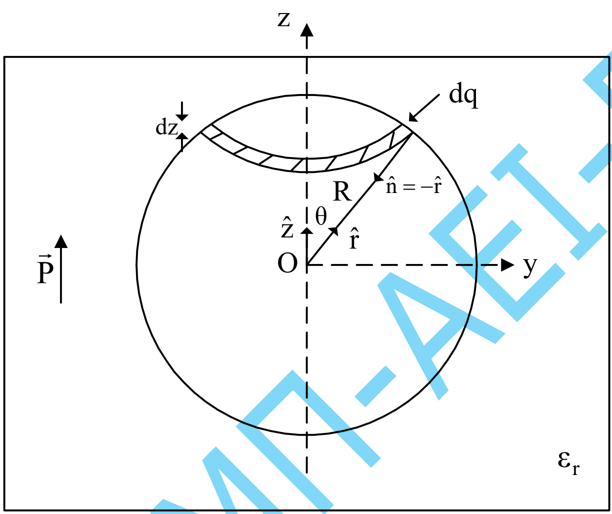
Αλλά σύμφωνα με την **(4 – 4)** είναι $\sigma_p=\vec{P}\cdot\hat{n}$ και από την **(4-13)** είναι $\sigma_f=-\vec{D}\cdot\hat{n}$, οπότε η **(2)** γράφεται :

$$\sigma_p=-\sigma_f\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\Rightarrow\sigma_p=\sigma_f\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$$

Άσκηση 4.11

Εντός απείρου διηλεκτρικού σταθερής πόλωσης $\vec{P} = P_o\hat{z}$ υπάρχει σφαιρική οπή ακτίνας R. Υπολογίστε τις προβολές της έντασης $\vec{E}$ στο κέντρο της οπής O, λόγω των δέσμιων φορτίων.

Λύση



Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P_o\hat{z}\cdot(-\hat{r}) \Rightarrow \sigma_p = -P_o\cos\theta$$

όπου P_o το μέτρο της σταθερής πόλωσης.
Η ένταση στο κέντρο O οφείλεται στο φορτισμένο σφαιρικό φλοιό. Θεωρώντας ως στοιχειώδες φορτίο dq ένα κυκλικό δακτύλιο του φλοιού, η ένταση αυτού είναι :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά : $\sigma_p = \dfrac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma_p dS = -P_o\cos\theta dS$

και $dS = 2\pi R\sin\theta dz = 2\pi R\sin\theta R d\theta = 2\pi R^2\sin\theta d\theta$

οπότε : $dq = -P_o 2\pi R^2\cos\theta\sin\theta d\theta$ και η **(1)** γίνεται :

$$dE = -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\cos\theta\sin\theta d\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Αναλύοντας την ένταση dE στις προβολές της προκύπτει :

$$dE_y = dE\sin\theta \overset{(2)}{=} -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\cos\theta\sin^2\theta d\theta$$

Άρα : $E_y = \int dE_y = -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi} \cos\theta \sin^2\theta d\theta = -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi} \sin^2\theta d(\sin\theta) =$

$$= -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \Rightarrow E_y = 0$$

και $dE_z = dE\cos\theta \overset{(2)}{=} -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\cos^2\theta \sin\theta d\theta$

Άρα : $E_z = \int dE_z = -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\int_0^{\pi} \cos^2\theta[-d(\cos\theta)] =$

$$= \frac{P_o}{2\varepsilon_o}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \Rightarrow \frac{P_o}{2\varepsilon_o}\frac{(-2)}{3} \Rightarrow E_z = -\frac{P_o}{3\varepsilon_o}$$

Άσκηση 4.12

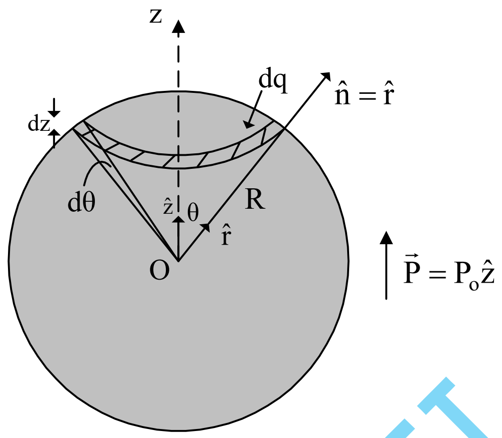
Σφαίρα από διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r διαθέτει σταθερή πόλωση $\vec{P} = P_o\hat{z}$.

α) Υπολογίστε το συνολικό δέσμιο φορτίο που αναλογεί σε κάθε ημισφαίριο.

β) Τοποθετείστε πάνω στον άξονα z με ακρίβεια το ισοδύναμο προς τη σφαίρα ηλεκτρικό δίπολο.

γ) Ποια είναι η ολική ενέργεια του συστήματος ;

Λύση



α) Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0 \qquad (\text{αφού } \vec{P} = \text{σταθερή})$$

ενώ η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P_o\hat{z}\cdot\hat{r} \Rightarrow \sigma_p = P_o\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα στο άνω ημισφαίριο που αντιστοιχεί σε γωνία $0 \le \theta \le \pi/2$, το δέσμιο φορτίο που αναλογεί δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$q_p = \int_S \sigma_p dS$$

όπου dS είναι το εμβαδό του στοιχειώδους φορτίου dq και είναι :

$$dS = 2\pi R\sin\theta dz = 2\pi R\sin\theta R d\theta = 2\pi R^2\sin\theta d\theta$$

Οπότε : $$q_p = \int_0^{\pi/2} P_o\cos\theta 2\pi R^2\sin\theta d\theta = 2\pi R^2 P_o\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 P_o\int_0^{\pi/2}\sin\theta d(\sin\theta) = 2\pi R^2 P_o\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi R^2 P_o\frac{1}{2} \Rightarrow q_p = \pi R^2 P_o \qquad \textbf{(2)}$$

Στο κάτω ημισφαίριο, που αντιστοιχεί σε γωνία $\pi/2 \le \theta \le \pi$, αναλογεί δέσμιο φορτίο που υπολογίζεται όπως παραπάνω και είναι :

$$q'_p = -\pi R^2 P_o = -q_p$$

Δηλαδή παρατηρείται μια συσσώρευση θετικών φορτίων στο άνω ημισφαίριο και αρνητικών στο κάτω ημισφαίριο, έτσι ώστε το συνολικό φορτίο να είναι πάντα μηδέν.

β) Το ισοδύναμο προς τη διηλεκτρική σφαίρα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται προφανώς από τα δυο φορτία $\pm q_p$ σε απόσταση d μεταξύ τους, τέτοια ώστε η προκύπτουσα πόλωση να είναι η P_o. Επομένως επειδή η ηλεκτρική ροπή του διπόλου είναι $\vec{p} = q_p d\hat{z}$, σύμφωνα με τη σχέση **(4 – 1)** προκύπτει :

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} \Rightarrow P_o\hat{z} = \frac{q_p d\hat{z}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow d = \frac{4\pi R^3}{3q_p}P_o \overset{(2)}{=} \frac{4\pi R^3 P_o}{3\pi R^2 P_o} \Rightarrow d = \frac{4}{3}R$$

γ) Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου $\vec{E}$ η ένταση στο κέντρο Ο που οφείλεται στο σφαιρικό φορτισμένο φλοιό ακτίνας R και σύμφωνα με την **Άσκηση 4.11** είναι :

$$\vec{E} = -\frac{P_o}{3\varepsilon_o}\hat{z}$$

και η ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{p}$ σύμφωνα με την **(4 – 1)** είναι :

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} \Rightarrow \vec{p} = \vec{P}V = \vec{P}\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \vec{p} = P_o\frac{4}{3}\pi R^3\hat{z}$$

Άρα τελικά η **(3)** δίνει :

$$U = -P_o\frac{4}{3}\pi R^3\hat{z}\cdot\left(-\frac{P_o}{3\varepsilon_o}\hat{z}\right) \Rightarrow U = \frac{4}{9\varepsilon_o}\pi R^3 P_o^2$$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com