

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ****α) Άλγεβρα**

$$\alpha^{-x} = 1/\alpha^x \quad \alpha^{(x+y)} = \alpha^x \alpha^y \quad \alpha^{(x-y)} = \alpha^x \alpha^{-y} = \alpha^x / \alpha^y$$

**Τύπος δευτεροβάθμιας εξίσωσης :**

$$\text{Αν } \alpha x^2 + bx + c = 0 \quad \text{τότε } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\alpha}$$

**Ιδιότητες λογαρίθμων :**

Αν  $\ln a = x$  τότε  $a = e^x$ , όπου  $e = 2,72$  (νεπέρειος αριθμός),  
 $e^{-1} = 1/e = 0,368$

$$\ln e = 1, \quad \ln 1 = 0, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln(a/b) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(1/a) = -\ln a, \quad \ln(a^n) = n \ln a, \quad \ln(e^x) = x, \quad \ln(a^x) = x \ln a$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

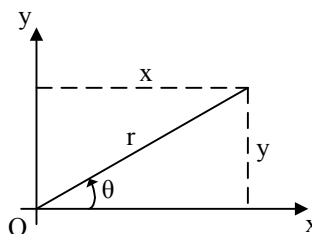
**β) Τριγωνομετρία**

**Τριγωνομετρικές συναρτήσεις της γωνίας  $\theta$**

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad \csc \theta = \frac{r}{y}$$



**Πυθαγόρειο θεώρημα**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

**Τριγωνομετρικές ταυτότητες**

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \quad \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

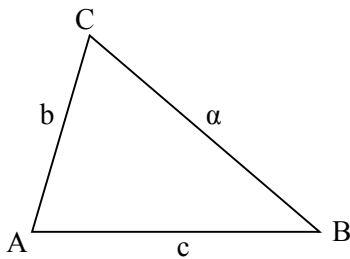
$$\sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \quad \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$



Για οποιοδήποτε τρίγωνο ισχύουν :

**Νόμος ημιτόνων :**  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

**Νόμος συνημιτόνων :**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

**Τιμές τριγωνομετρικών αριθμών**

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2 = 0,5$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = 0,866$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \sqrt{3}/3 = 0,577$$

$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3} = 1,732$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2 = 0,707$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

Π.Φ.ΜΟΙΡΑΣ

## γ) Τύποι διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού

Παράγωγοι		Ολοκληρώματα	
1	$\frac{dx}{dx} = 1$	1	$\int dx = x$
2	$\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$	2	$\int audx = a \int udx$
3	$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	3	$\int (u+v) dx = \int u dx + \int vdx$
4	$\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$	4	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5	$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	5	$\int \frac{dx}{x} = \ln x $
6	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	6	$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$
7	$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$	7	$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$
8	$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$	8	$\int \cosh x dx = \sinh x$
9	$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$	9	$\int \sinh x dx = \cosh x$
10	$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	10	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
11	$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
12	$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	12	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x$
13	$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$	13	$\int \sin x dx = -\cos x$
14	$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$	14	$\int \cos x dx = \sin x$
15	$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	15	$\int \tan x dx = \ln \sec x $

16	$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$	16	$\int \cot x dx = \ln  \sin x $
17	$\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$	17	$\int \sec x dx = \ln  \sec x + \tan x $
18	$\frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$	18	$\int \csc x dx = \ln  \csc x + \cot x $

όπου  $u, v$  συναρτήσεις του  $x$  και  $a, m$  σταθερές.

### δ) Τύποι διανυσματικού λογισμού

Αν είναι  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις  $x, y, z$ .

Τότε:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{a}$  με συνιστώσες  $a_x, a_y, a_z$  στους άξονες  $x, y, z$  μπορεί να γραφεί:  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ .

Αν είναι  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  τυχαία διανύσματα με μέτρα  $a, b, c$ , τότε:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s \text{ βαθμωτό μέγεθος})$$

Αν πούμε  $\theta$  τη μικρότερη των μεταξύ των  $a$  και  $b$  γωνιών, τότε:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = abc \cos \theta$$

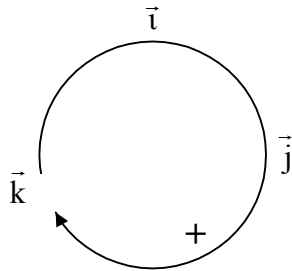
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z) \vec{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \vec{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$



Για τον υπολογισμό του εξωτερικού γινομένου των μοναδιαίων διανυσμάτων, βοηθάει ο μνημονικός κανόνας του διπλανού σχήματος, σύμφωνα με τον οποίο όταν πολλαπλασιάζονται μοναδιαία διανύσματα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού το αποτέλεσμα είναι ίσο με το τρίτο διάνυσμα, ενώ όταν πολλαπλασιάζονται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού το αποτέλεσμα είναι ίσο με το αντίθετο του τρίτου διανύσματος. Δηλαδή :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

#### ε) Διανυσματικές ταυτότητες

$$\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

**στ) Γεωμετρία**

Περιφέρεια κύκλου ακτίνας $r$ :	$c = 2 \pi r$
Εμβαδόν επιφάνειας κύκλου ακτίνας $r$ :	$S = \pi r^2$
Όγκος σφαίρας ακτίνας $r$ :	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας ακτίνας $r$ :	$S = 4\pi r^2$
Όγκος κυλίνδρου ακτίνας $r$ και ύψους $h$ :	$V = \pi r^2 h$
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου ακτίνας $r$ και ύψους $h$ :	$S = 2\pi r h$

**Π.Φ.ΜΟΙΡΑΣ**