Άσκηση (δίπλα)

Θεωρείστε την κατάσταση: $\psi = c_0\psi_0 + c_1\psi_1$

Ποιά είναι η συνθήκη για να είναι η ψ κανονικοποιημένη όταν οι ψ_0, ψ_1 είναι ορθοκανονικές.

Συνθήκη κανονικοποίησης: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi \, dx = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (c_0^*\psi_0^* + c_1^*\psi_1^*)(c_0\psi_0 + c_1\psi_1)\, dx = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (c_0^*c_0\psi_0^*\psi_0 + c_0^*c_1\psi_0^*\psi_1 + c_1^*c_0\psi_1^*\psi_0 + c_1^*c_1\psi_1^*\psi_1)\, dx = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow c_0^*c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \cancelto{1}{\psi_0^*\psi_0}\, dx + c_0^*c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cancelto{0}{\psi_0^*\psi_1}\, dx + c_1^*c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \cancelto{0}{\psi_1^*\psi_0}\, dx + c_1^*c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cancelto{1}{\psi_1^*\psi_1}\, dx = 1 \rightarrow$$

Λόγω ορθογωνιότητας των ψ_0, ψ_1: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*\psi_1\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*\psi_0\, dx = 0$

Λόγω κανονικοποίησης των ψ_0, ψ_1: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*\psi_0\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*\psi_1\, dx = 1.$

Άρα: $c_0^*c_0 + c_1^*c_1 = 1 \rightarrow \boxed{|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1}.$

Μέση τιμή ενέργειας: $\boxed{\langle E \rangle = \sum |c_n|^2 E_n}$

Χρονική εξέλιξη κυματοσυνάρτησης.

Αν σε μια άσκηση μας δοθεί η κυματοσυνάρτηση σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ($t=0$, ή $t=t_0$) δηλ. $\psi(x, t_0)$ τότε η κυματοσυνάρτηση μετά από χρόνο t είναι:

$$\psi(x,t) = \psi(x,t_0)\, e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} =$$

"τελεστής χρονικής εξέλιξης"

$$= \left[c_1\psi_1(x,t_0) + c_2\psi_2(x,t_0) + \dots + c_n\psi_n(x,t_0)\right] e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\psi(x,t) = c_1\psi_1(x,t_0)\, e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + c_2\psi_2(x,t_0)\, e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} + \dots + c_n\psi_n(x,t_0)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}}$$

$P_1 = |c_1|^2$: η πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση ψ_1 με ενέργεια E_1

⋮

$P_n = |c_n|^2$: η πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση ψ_n με ενέργεια E_n.